Caractéristiques et similitude des turbomachines hydrauliques

par **André L. JAUMOTTE**
Ingénieur civil
Professeur à l'Université libre de Bruxelles

Pierre DECOCK
Ingénieur civil
Chef de travaux à l'Université libre de Bruxelles

et **Gilbert RIOLLET**
Professeur honoraire à l'École Centrale des Arts et Manufactures
Ancien Directeur Technique des turbines à vapeur Alsthom

1. Variables et similitude de fonctionnement ..... B 4 402 - 2
1.1 Variables de fonctionnement ..... — 2
1.2 Similitude de fonctionnement ..... — 3

2. Caractéristiques de fonctionnement ..... — 3
2.1 Pompes ..... — 3
2.2 Turbines hydrauliques ..... — 3

3. Introduction à la similitude de fonctionnement ..... — 4
3.1 Type et famille de turbomachines ..... — 4
3.2 Similitude de fonctionnement ..... — 4

4. Propriétés de similitude ..... — 5
4.1 Coefficients de Rateau ..... — 5
4.2 Coefficient de pression μ ..... — 5
4.3 Coefficient de débit δ ..... — 5
4.4 Coefficient de puissance interne τ ..... — 6
4.5 Ouverture réduite γ ..... — 6
4.6 Rendement interne η_i ..... — 6
4.7 Énoncé des propriétés de similitude ..... — 6

5. Théorème de Rateau ..... — 6

6. Caractéristiques réduites d'un type de turbomachine ..... — 7
6.1 Pompes ..... — 7
6.2 Turbines hydrauliques ..... — 7

7. Limitation des propriétés de similitude ..... — 9
7.1 Variables secondaires ..... — 9
7.2 Effet d'échelle ..... — 9
7.3 Cavitation ..... — 11

8. Vitesse spécifique ..... — 11
8.1 Introduction ..... — 11
8.2 Coefficient de vitesse spécifique ..... — 11
8.3 Nombre de tours spécifique ..... — 12
8.4 Facteurs de conversion ..... — 13

Pour en savoir plus ..... Doc. B 4 402

Pour tout éclaircissement concernant les notions fondamentales, le lecteur pourra se reporter à l'article [B 4 400] ***Théorie générale des turbomachines*** *dans ce traité.*

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

Notations et Symboles

Symbole	Unité	Définition
C	N · m nombre	couple terme constant
D	m	diamètre extérieur du rotor
E	J/kg	travail (ou énergie massique) du fluide
E_a	J/kg	travail sur l'arbre (ou énergie massique théorique)
F		fonction d'effet d'échelle
H	m	hauteur de fluide
K		fraction des pertes échappant à l'effet d'échelle
N	tr/min	vitesse de rotation
N_s	tr/min	nombre de tours spécifique d'une pompe
N'_s	tr/min	nombre de tours spécifique d'une turbine
O	m^2	ouverture
P	W	puissance
Q_{11}	L/s	débit réduit
Re	nombre	nombre de Reynolds
S	m^2	section de passage du fluide
d_s	m	diamètre spécifique d'une pompe
d'_s	m	diamètre spécifique d'une turbine
g	m/s^2	accélération de la pesanteur
h	m	hauteur des aubages mobiles
i	degré	angle de calage d'un aubage
j	m	jeu à l'extrémité des aubages mobiles
ℓ	m	dimension caractéristique d'un canal
p	Pa	pression
q	kg/s	débit-masse de fluide
q_V	m^3/s	débit-volume de fluide
r	m	rayon
u	m/s	vitesse d'entraînement ou circonférentielle
v	m/s	vitesse absolue
w	m/s	vitesse relative par rapport au rotor
x	nombre	degré d'ouverture des distributeurs
z	m	altitude
Δ	nombre	diamètre spécifique réduit
Ω_s	nombre	coefficient de vitesse spécifique
α	degré	angle entre la vitesse d'entraînement et la vitesse absolue
β	degré	angle entre la vitesse d'entraînement et la vitesse relative
γ	nombre	ouverture réduite
δ	nombre	coefficient de débit
ε	m	rugosité
ζ	nombre	coefficient de perte hydraulique d'un canal
η	nombre	rendement
μ	nombre	coefficient de pression (ou pouvoir manométrique)
μ	$N \cdot s/m^2$	viscosité dynamique
ρ	kg/m^3	masse volumique
τ	nombre	coefficient de puissance interne

Un même symbole ou indice n'a reçu de significations multiples que lorsque toute confusion était impossible.

Notations et Symboles

Symbole	Unité	Définition
ω	rad/s	vitesse angulaire
Δf	J/kg	perte énergétique massique
$\Sigma \Delta f_H$	J/kg	somme des pertes hydrauliques
$\Sigma \Delta f_{F,i}$	J/kg	somme des pertes par fuites internes

Un même symbole ou indice n'a reçu de significations multiples que lorsque toute confusion était impossible.

Liste des Indices

f (seul)	relatif à un canal fixe
i	interne
m	méridien
r	relatif à un canal mobile ou au rotor
f, i	relatif à une fuite interne
f, d	dû au frottement de disques
s	spécifique
0	entrée d'un canal
1	sortie d'un canal entrée du rotor relatif à une première machine
2	sortie du rotor à la périphérie du rotor relatif à une seconde machine

1. Variables et similitude de fonctionnement

1.1 Variables de fonctionnement

Les caractéristiques de fonctionnement d'une turbomachine traduisent les relations fonctionnelles existant entre les différentes variables qui définissent ce fonctionnement. Pour une machine donnée fonctionnant avec un fluide incompressible de masse volumique ρ, ces variables sont de diverses catégories :

— **les variables hydrauliques**, c'est-à-dire celles qui caractérisent l'écoulement liquide et qui, pour l'utilisateur d'une turbomachine, sont principalement les suivantes :

- le débit-volume q_V,
- le travail ou énergie massique utile (pour une pompe) ou disponible (pour une turbine), désigné par E, ou la hauteur correspondante $H = E/g$,
- l'ouverture O, combinaison des deux précédentes et égale par définition à :

$$O = q_V / \sqrt{2E} \qquad (1)$$

— **les variables mécaniques**, c'est-à-dire celles qui définissent les exigences vis-à-vis du moteur entraînant la machine génératrice ou les qualités du générateur entraîné par la machine réceptrice, et parmi lesquelles on peut citer :

- la vitesse angulaire de l'arbre ω,
- la puissance externe P,
- le couple externe C égal à P/ω ;

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

— **les variables de rendement**, qui combinent des variables hydrauliques et mécaniques, comme par exemple le rendement global η égal à :

• machines génératrices :

$$\eta = \rho\, q_V\, E/P$$

• machines réceptrices :

$$\eta = P/\rho\, q_V\, E$$

— **les variables de réglage interne**, qui sont particulières aux turbines hydrauliques et qui, dans le cas le plus général, sont les suivantes :

• la section de passage du distributeur, que nous caractérisons par exemple par le *degré d'ouverture x*, égal au rapport de cette section à la section maximale réalisable,

• l'angle de calage des aubages rotoriques, que nous désignons par i.

Parmi toutes ces variables, on peut en considérer un certain nombre comme indépendantes ; le choix des variables indépendantes est conventionnel et guidé par la pratique, mais *leur nombre est fixé*. Il en résulte divers modes classiques de présentation des caractéristiques de fonctionnement, que nous préciserons au paragraphe 2.

1.2 Similitude de fonctionnement

Les propriétés de similitude qui s'appliquent à des machines géométriquement semblables (§ 3.1) permettent de réduire le nombre de variables de fonctionnement indépendantes en définissant des groupements adimensionnels de variables ou *variables réduites*. Pour les turbomachines, elles conduisent aux *coefficients de Rateau* (§ 4.1) ; particularisées aux machines identiques, elles sont énoncées par le théorème de Rateau (§ 5).

Les représentations classiques des caractéristiques de fonctionnement des turbomachines hydrauliques, telles qu'elles résultent de l'application des propriétés de similitude, sont exposées au paragraphe 6 où nous distinguons le cas des pompes et des turbines. Enfin, après avoir précisé au paragraphe 7 les limites de validité des propriétés de similitude, nous définissons le concept de *vitesse spécifique* qui permet de caractériser une famille de turbomachines géométriquement semblables et constitue de ce fait un coefficient de type (§ 8).

2. Caractéristiques de fonctionnement

2.1 Pompes

2.1.1 Relations fonctionnelles caractéristiques

Considérons une pompe fonctionnant sur un circuit donné avec un fluide de masse volumique ρ. Parmi toutes les variables de fonctionnement énumérées au paragraphe 1, il n'y a que *deux variables indépendantes*, une variable hydraulique correspondant à une action sur le circuit et une variable mécanique résultant d'une action sur le moteur d'entraînement. Ainsi, on peut, par exemple, fixer la vitesse de rotation en agissant sur le moteur et fixer le débit par un étranglement placé sur le circuit.

On choisit généralement comme variables indépendantes le débit-volume q_V et la vitesse angulaire ω. Toutes les autres variables seront alors fonction de q_V et ω ; les relations fonctionnelles caractéristiques seront donc les suivantes :

$$E \text{ (ou } H) = f(q_V, \omega) \qquad O = f'(q_V, \omega)... \tag{2}$$

$$P = f''(q_V, \omega) \qquad C = f'''(q_V, \omega) \qquad \eta = f^{\mathrm{IV}}(q_V, \omega)... \tag{3}$$

2.1.2 Surfaces caractéristiques

Si l'on porte en coordonnées trirectangulaires les relations fonctionnelles définies au paragraphe 2.1.1, chacune d'elles est représentée par une surface. Ce sont les surfaces caractéristiques de la machine. Nous remarquons que *la connaissance de deux surfaces caractéristiques correspondant l'une à une des relations* (2) *et l'autre à une des relations* (3) *suffit à définir entièrement les propriétés de la turbomachine*, les autres surfaces pouvant s'en déduire par calcul. Les surfaces le plus fréquemment utilisées sont :

$$E \text{ (ou } H) = f(q_V, \omega) \quad \text{et} \quad P = f''(q_V, \omega)$$

ou

$$E \text{ (ou } H) = f(q_V, \omega) \quad \text{et} \quad \eta = f^{\mathrm{IV}}(q_V, \omega)$$

2.1.3 Courbes caractéristiques

L'emploi d'une représentation spatiale n'étant pas pratique, on préfère représenter graphiquement les propriétés d'une pompe dans un plan en considérant des coupes, dans les surfaces caractéristiques, par des plans d'égale vitesse angulaire ω.

Pour une vitesse angulaire donnée, on obtient ainsi les courbes caractéristiques de la turbomachine. On remarquera encore que *la connaissance de deux courbes caractéristiques, correspondant respectivement à une des relations* (2) *et à une des relations* (3), *suffit à définir complètement les propriétés d'une pompe à une vitesse donnée*.

Les courbes E (ou H) $= f(q_V)$; $O = f'(q_V)$; $P = f''(q_V)$; $C = f'''(q_V)$ et $\eta = f^{\mathrm{IV}}(q_V)$ sont respectivement appelées les caractéristiques énergétique (ou manométrique), d'ouverture, de puissance, de couple et de rendement. Les plus utilisées sont les caractéristiques énergétique et de rendement. On en trouvera un exemple à la figure **1**.

Pour toute une série de valeurs différentes de la vitesse angulaire (figure **2**), les propriétés d'une pompe peuvent être représentées en traçant dans le même plan les caractéristiques énergétiques relatives à ces valeurs et en joignant sur ces courbes les points d'égal rendement. On obtient ainsi un double réseau qui remplace les deux surfaces caractéristiques correspondantes.

2.2 Turbines hydrauliques

2.2.1 Relations fonctionnelles caractéristiques

Considérons une turbine hydraulique fonctionnant entre un plan d'eau amont et un plan d'eau aval . Dans le cas le plus général, le fonctionnement de la machine dépend de *quatre variables indépendantes* (§ 1.1) :

— une variable hydraulique, par exemple l'énergie massique disponible E (ou la hauteur H), liée à la différence des niveaux géométriques des plans d'eau amont et aval ;

— une variable mécanique, par exemple la vitesse angulaire ω ;

— le degré d'ouverture x du distributeur ;

— l'angle de calage i des aubages rotoriques.

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

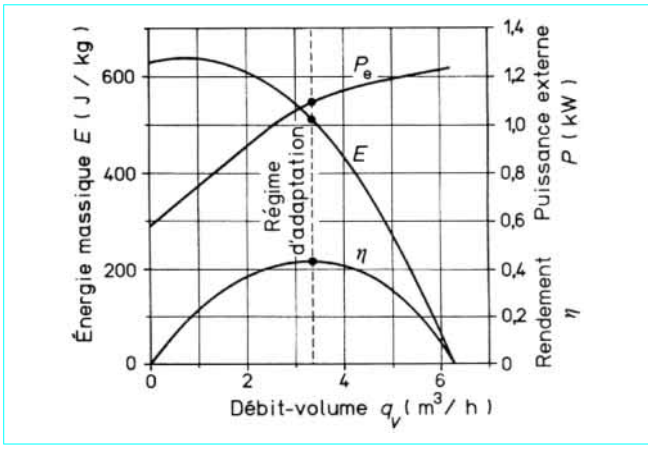

Figure 1 – Caractéristiques d'une pompe centrifuge multicellulaire à vitesse constante (*N* = 3 000 tr/min)

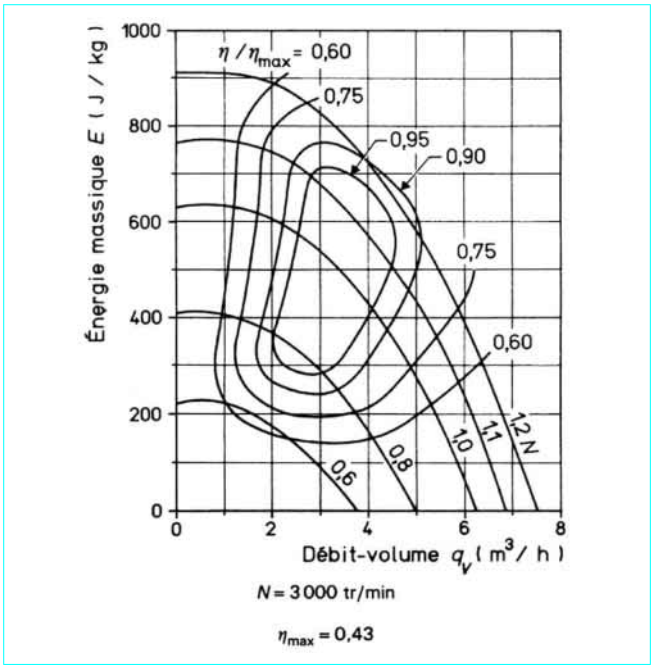

Figure 2 – Caractéristiques de la pompe de la figure 1 à diverses vitesses de rotation

Le débit-volume q_V, l'ouverture O, la puissance externe P, le couple externe C et le rendement global η sont alors fonction de ces quatre variables. Comme pour les pompes, la connaissance de deux de ces fonctions définit complètement les propriétés de la turbine.

On utilisera, par exemple :

$$q_V = f(E, \omega, x, i) \quad \text{et} \quad P = f'(E, \omega, x, i)$$

ou

$$q_V = f(E, \omega, x, i) \quad \text{et} \quad \eta = f''(E, \omega, x, i)$$

2.2.2 Représentation graphique

Vu le nombre de variables indépendantes dont dépend le fonctionnement d'une turbine hydraulique, une représentation plane de l'ensemble des caractéristiques de fonctionnement de cette machine est difficile. Plutôt que d'établir des représentations paramétriques partielles, on préfère faire appel aux propriétés de similitude. Nous donnons au paragraphe 6.2 un exemple des représentations graphiques utilisées.

3. Introduction à la similitude de fonctionnement

3.1 Type et famille de turbomachines

Deux turbomachines sont dites du même *type* lorsqu'elles sont géométriquement semblables, c'est-à-dire lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant toutes les dimensions linéaires par un même facteur appelé *coefficient de similitude géométrique*. **L'ensemble des turbomachines d'un même type forme une *famille*** qui est donc caractérisée par la constance :

— des rapports de toutes les dimensions linéaires à une longueur de référence que nous choisissons égale au rayon extérieur du rotor r_2 ;

— des angles homologues, en particulier des angles définissant la position des aubages, tant fixes que mobiles.

En conséquence, une pompe d'une famille donnée est entièrement déterminée si l'on en connaît une seule dimension linéaire. Pour les turbines hydrauliques comportant des réglages internes, par contre, il n'en est pas de même : outre une dimension linéaire, il faut encore préciser la valeur des variables de réglage interne : le degré d'ouverture x du distributeur et l'angle de calage i des aubages rotoriques ; en effet, *pour ces machines, la similitude géométrique postule également la constance de x et i*.

3.2 Similitude de fonctionnement

Par définition, deux turbomachines de même type fonctionnent en similitude lorsqu'en tous les couples de points homologues pris dans ces machines les triangles de vitesses sont semblables.

Quand il y a similitude de fonctionnement entre deux turbomachines de même type, A et B, on a donc pour tous les couples de points homologues :

$$\left.\begin{aligned} (w/u)_A &= (w/u)_B \\ (v/u)_A &= (v/u)_B \\ (v_m/u)_A &= (v_m/u)_B \ldots \\ \alpha_A = \alpha_B \ \text{et} \ \beta_A &= \beta_B \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Compte tenu de la similitude géométrique et de ce que $u = \omega r$, on peut également rapporter chaque côté des triangles de vitesses à la vitesse d'entraînement en un autre point pris dans la machine, comme la vitesse d'entraînement u_2 de sortie du rotor, dont le rayon a été choisi comme longueur de référence.

Nous aurons par exemple :

$$(w/u_2)_A = (w/u_2)_B \quad \text{ou} \quad (v/u_2)_A = (v/u_2)_B \qquad (5)$$

Pour les turbomachines hydrauliques, il suffit que les triangles de vitesses soient semblables en un *seul couple de points homologues* pour que la similitude de fonctionnement soit établie. Cette propriété résulte de la conservation du débit-volume dans la machine ; si nous

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

exprimons cette propriété entre deux sections d'écoulement S et S' quelconques, prises dans un rotor de turbomachine, on obtient en effet successivement, en divisant par la vitesse d'entraînement u_2 :

$$S w \sin \beta = S' \, w' \sin \beta'$$

$$S (w/u_2) \sin \beta = S' \, (w'/u_2) \sin \beta'$$

$$w/u_2 = (S'/S) \, (\sin \beta'/\sin \beta) \, (w'/u_2)$$

Si nous appliquons cette dernière relation à deux machines de même type et si nous supposons par exemple que les triangles de vitesses sont semblables dans les sections S', c'est-à-dire si (w'/u_2) est constant, on en déduit que (w/u_2) est également constant, c'est-à-dire que les triangles de vitesses sont également semblables dans les sections S.

En conséquence, *une seule condition* suffit à établir la similitude de fonctionnement des turbomachines hydrauliques, telle que nous l'avons définie. Cette condition génère l'*unique variable indépendante* à considérer lorsque l'on exprime les relations fonctionnelles caractéristiques de ces machines par les propriétés de similitude (§ 4).

4. Propriétés de similitude

4.1 Coefficients de Rateau

Nous considérons ici une famille de turbomachines hydrauliques, chaque machine étant donc définie individuellement par la valeur d'une de ses dimensions linéaires, en l'occurrence celle de la dimension de référence r_2.

Les coefficients de Rateau sont des variables réduites, c'est-à-dire des groupements adimensionnels des variables de fonctionnement de ces machines ; nous en utilisons les définitions et désignations suivantes, u_2 étant la vitesse d'entraînement au rayon r_2 :

— coefficient de pression (ou pouvoir manométrique) :

$$\mu = E/u_2^2 = E/\omega^2 r_2^2 = gH/u_2^2 \qquad (6)$$

— coefficient de débit :

$$\delta = q_V/u_2 r_2^2 = q_V/\omega r_2^3 \qquad (7)$$

— coefficient de puissance interne :

$$\tau = P_i/\rho u_2^3 r_2^2 = P_i/\rho \omega^3 r_2^5 \qquad (8)$$

— ouverture réduite :

$$\gamma = O/r_2^2 \qquad (9)$$

Les propriétés des coefficients de Rateau, auxquels nous adjoignons le rendement interne η_i, lui-même sans dimension par définition, sont établies ci-dessous successivement. Nous en déduirons les propriétés de similitude des turbomachines, énoncées en conclusion au paragraphe (§ 4.7).

4.2 Coefficient de pression μ

On sait que l'évolution de la pression dans un canal fixe ou mobile est gouvernée par l'équation de Barré de Saint-Venant, qui doit être appliquée dans le premier cas au mouvement absolu et dans le second au mouvement relatif. Si les états 0 et 1 sont ceux existant respectivement à l'entrée et à la sortie du canal, on a :

$$\frac{p_1 - p_0}{\rho} + g(z_1 - z_0) + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} + \Delta f_0^1 = 0 \quad \text{(canal fixe)}$$

$$\frac{p_1 - p_0}{\rho} + \frac{w_1^2 - w_0^2}{2} - \frac{u_1^2 - u_0^2}{2} + \Delta f_{r\,0}^{\;1} = 0 \quad \text{(canal mobile)}$$

En qualifiant en même temps la similitude hydraulique de *simplifiée*, on retient l'hypothèse fondamentale selon laquelle les pertes Δf varient comme le carré des vitesses d'écoulement dans l'ensemble des états de fonctionnement semblables pour lesquels les triangles de vitesses conservent la même forme en des points homologues. Cette convention revient à **négliger l'influence du nombre de Reynolds et de la rugosité relative sur les pertes**, mais se révèle très proche de la réalité dans toutes les situations, en pratique les plus fréquentes, où l'écoulement est de nature turbulente.

On a vu (§ 3.2) que, si l'on compare deux turbomachines en des états de fonctionnement semblables, les vitesses v, w et u en des points homologues sont chacune dans un rapport donné avec la vitesse tangentielle u_2 de la machine considérée. Il en résulte, compte tenu de l'hypothèse faite sur l'évolution des pertes, que les quantités :

$$\Delta_0^1 \left(\frac{p}{\rho} + g z \right)$$

relative à un canal fixe et $\Delta_0^1 p/\rho$ relative à un canal mobile, où il n'y a pas de changement de l'altitude z, varient individuellement comme le u_2^2 propre à chaque appareil, et que cette propriété se généralise à la variation d'énergie massique, ou de hauteur totale, entre les extrémités des canaux. Par sommation des effets créés par chaque canal, l'énergie massique E ou la quantité gH, échangées dans l'ensemble de la machine, suivent encore la même loi. Il en résulte que **lorsque deux turbomachines hydrauliques de même type fonctionnent en similitude, leur coefficient de pression μ est le même.**

L'appellation de **coefficient de pression** (ou de pouvoir manométrique) trouve sa justification en ce que l'énergie piézométrique constitue la part prépondérante de l'énergie massique mesurée entre l'entrée et la sortie de l'appareil.

4.3 Coefficient de débit δ

Pour connaître le débit q_V d'une machine, on peut d'abord calculer le débit-volume à la sortie du rotor. Celui-ci est égal à :

$$q_{V,\,r} = S \, w_2 \sin \beta_2$$

avec S aire de la surface de révolution coupée par l'écoulement.

Pour des fonctionnements semblables :

$$\frac{q_{V,\,r}}{u_2 r_2^2} = \frac{S}{r_2^2} \times \frac{w_2}{u_2} \times \sin \beta_2 = \text{Cte}$$

Il reste à examiner les fuites internes et externes, par lesquelles $q_{V,\,r}$ diffère de q_V. Or le débit-volume de chaque fuite interne se met sous la forme :

$$q_{V,\,f,\,i} = \frac{q_{f,\,i}}{\rho} = \alpha \, S_{f,\,i} \sqrt{\Delta p/\rho}$$

avec α coefficient expérimental,

$S_{f,\,i}$ section efficace de fuite,

Δp écart de pression génératrice entre les points externes de la dérivation, imposé par l'écoulement principal.

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

En admettant que α, comme les pertes hydrauliques, est insensible au nombre de Reynolds et que la similitude géométrique s'étend aux jeux et par conséquent à $S_{f,i}$, proportionnel à r^2, on constate qu'en état de similitude hydraulique où $\Delta p/\rho$ varie comme u_2^2 (§ 4.2) :

$$\frac{q_{V,f,i}}{u_2 r_2^2} = \text{Cte}$$

Comme enfin l'on supprime pratiquement toute fuite externe dans les machines hydrauliques par l'emploi de garnitures mécaniques à frottement, il se trouve établi que **lorsque deux turbomachines hydrauliques de même type fonctionnent en similitude, leur coefficient de débit δ est le même**.

4.4 Coefficient de puissance interne τ

À condition que le travail sur l'arbre E_a (ou énergie massique théorique) soit évalué par l'équation d'Euler en tenant compte de l'influence des fuites sur le champ des vitesses, la puissance interne d'une turbomachine monocellulaire a pour expression :

$$P_i = E_a (q_i + \Sigma q_{f,i}) + P_{f,d} \qquad \text{(pompe)}$$
$$P_i = |E_a| (q_i - \Sigma q_{f,i}) - P_{f,d} \qquad \text{(turbine)}$$

avec q_i débit interne,
$\Sigma q_{f,i}$ somme des fuites internes,
$P_{f,d}$ puissance de frottement de disques.

On reconnaît dans $q_i \text{n} \Sigma q_{f,i}$ le débit traversant le rotor.

Après transformation et division par $\rho u_2^3 r_2^2$ pour faire apparaître le coefficient de puissance, ces expressions deviennent :

$$\tau = \frac{E_a q_i}{\rho u_2^3 r_2^2}\left(1 + \frac{\Sigma q_{f,i}}{q_i} + \frac{P_{f,d}}{E_a q_i}\right) \qquad \text{(pompe)}$$
$$\tau = \frac{|E_a| q_i}{\rho u_2^3 r_2^2}\left(1 - \frac{\Sigma q_{f,i}}{q_i} - \frac{P_{f,d}}{E_a q_i}\right) \qquad \text{(turbine)}$$

Or :

- E_a se mesure, selon l'équation d'Euler, par la variation $\Delta_1^2(\vec{u} \times \vec{v})$ entre l'entrée et la sortie du rotor et varie, en similitude hydraulique, comme u_2^2. De plus, si les fuites externes sont nulles :

$$q_i = \rho q_V = \rho \delta u_2 r_2^2$$

d'où
$$\frac{E_a q_i}{\rho u_2^3 r_2^2} = \frac{\Delta_1^2(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \delta}{u_2^2}$$

se conserve entre deux appareils en états de fonctionnement semblables ;

- l'analyse faite au paragraphe 4.3 montre que $\Sigma q_{f,i}/q_i$ reste également constant ;
- si l'on se réfère à l'expression (80) de $P_{f,d}$ établie dans l'article *Théorie générale des turbomachines* [B 4 400], le terme :

$$\frac{P_{f,d}}{E_a q_i} = \frac{k_{f,d} \rho u_2^3 r_2^2}{\Delta_1^2(\vec{u} \times \vec{v}) \rho \delta u_2 r_2^2} = k_{f,d} \frac{u_2^2}{\Delta_1^2(\vec{u} \times \vec{v})}$$

constitue un autre invariant, à condition, comme pour les pertes hydrauliques, de négliger l'influence du nombre de Reynolds et de la rugosité relative sur $k_{f,d}$.

En définitive : **pour deux turbomachines hydrauliques fonctionnant en similitude, le coefficient de puissance interne τ est le même**.

Parce qu'elles suivent par nature des lois différentes de celles applicables à l'écoulement interne, les pertes mécaniques ne peuvent être incluses dans la similitude hydraulique. Un coefficient qui serait fondé sur la puissance externe ne se conserverait pas rigoureusement entre deux fonctionnements hydrauliques semblables.

4.5 Ouverture réduite γ

Pour une turbomachine quelconque, si l'on tient compte des relations (1), (6) et (7) dans la définition (9) de l'ouverture réduite, on obtient successivement :

$$\gamma = O/r_2^2 = q_V/\sqrt{2E}\, r_2^2$$
$$= (q_V/u_2 r_2^2)/\sqrt{2E/u_2^2} = \delta/\sqrt{2\mu}$$

En conséquence, vu les conclusions données aux paragraphes 4.2 et 4.3, **deux turbomachines de même type, fonctionnant en similitude, ont la même ouverture réduite γ**.

4.6 Rendement interne η_i

Considérons une pompe quelconque ; le rendement interne η_i peut s'écrire successivement :

$$\eta_i = \rho q_V E/P_i$$
$$= (q_V/u_2 r_2^2)(E/u_2^2)/(P_i/\rho u_2^3 r_2^2) = \delta\mu/\tau$$

Pour une turbine hydraulique, nous aurions obtenu de même :

$$\eta_i = \tau/\delta\mu$$

Il en résulte que, **pour deux turbomachines de même type, fonctionnant en similitude, le rendement interne est constant**.

On remarquera, comme au paragraphe 4.4, que, du fait des pertes mécaniques, l'invariance du rendement en similitude de fonctionnement ne peut être étendue au rendement global η. Cette extension, souvent faite en pratique, n'est acceptable que si les pertes mécaniques sont minimes par rapport à la puissance interne.

4.7 Énoncé des propriétés de similitude

En conclusion des propriétés des coefficients de Rateau établies ci-dessus, les propriétés de similitude des turbomachines hydrauliques s'énoncent comme suit : *lorsque des turbomachines hydrauliques de même type fonctionnent en similitude et que l'on peut négliger l'influence du nombre de Reynolds et de la rugosité relative, leurs coefficients de pression μ, de débit δ, et de puissance interne τ, leur ouverture réduite γ et leur rendement interne η_i sont des invariants*.

5. Théorème de Rateau

Les propriétés de similitude énoncées (§ 4.7) peuvent être particularisées à des **turbomachines identiques** ou, ce qui revient au même, à une **turbomachine unique** fonctionnant à vitesse quelconque avec le même fluide. En éliminant des expressions (6) (7)

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

(8) et (9) les constantes que sont dans ce cas le rayon r_2 et la masse volumique ρ, les propriétés de similitude s'énonceront comme suit : *pour des fonctionnements en similitude d'une même turbomachine, le débit-volume q_V, l'énergie massique utile ou disponible E et la puissance interne P_i sont respectivement proportionnels à la vitesse de rotation, au carré et au cube de cette vitesse ; en outre l'ouverture O et le rendement interne η_i sont invariants :*

$$q_V = k\,\omega \qquad E = k'\,\omega^2 \qquad P_i = k''\,\omega^3 \qquad O = k''' \qquad \eta_i = k^{IV}$$

Réciproquement, lorsque l'ouverture sur laquelle fonctionne une turbomachine hydraulique est constante tandis que la vitesse varie, il y a similitude de fonctionnement aux diverses vitesses, c'est-à-dire que le débit-volume est proportionnel à la vitesse, l'énergie massique au carré de cette vitesse, la puissance interne à son cube, et le rendement interne est invariant.

Cette réciproque constitue l'important **théorème de Rateau**. Celui-ci ne peut être démontré sans le secours de l'expérience ; cependant, si l'on admet prouvée par l'expérience une des propositions de ce théorème, les autres s'en déduisent immédiatement. Ainsi, si nous admettons que le débit-volume est proportionnel à la vitesse de rotation lorsque l'ouverture est constante, ce qui est prouvé par un grand nombre d'essais, il s'ensuit que, le rapport de la vitesse débitante v_{m2} à la vitesse d'entraînement étant alors constant, les triangles de vitesses restent semblables à eux-mêmes, et qu'il y a dès lors similitude de fonctionnement.

Les autres propositions sont donc aussi prouvées.

Remarquons pour conclure qu'en particularisant les propriétés de similitude à des turbomachines identiques, on a aussi implicitement résolu le problème du changement du fluide dans une machine donnée. En effet, la nature du fluide utilisé n'apparaît que par la masse volumique ρ dans le seul coefficient de puissance τ (8). On voit dès lors qu'en similitude de fonctionnement *un changement de la nature du fluide ne modifie ni le débit-volume q_V, ni l'énergie massique E, ni le rendement interne η_i, mais agit sur la puissance interne qui est directement proportionnelle à la masse volumique ρ.*

6. Caractéristiques réduites d'un type de turbomachine

6.1 Pompes

Vu les propriétés de similitude énoncées (§ 4.7), on peut généraliser les relations fonctionnelles caractéristiques définies au paragraphe 2.1.1 à toutes les pompes d'une même famille. Comme indiqué (§ 3.2), ces relations ne font intervenir qu'*une seule variable indépendante*. La variable généralement choisie pour les pompes est le coefficient de débit δ. Nous obtenons ainsi de nouvelles relations fonctionnelles, soit :

$$\mu = f(\delta) \qquad \gamma = f'(\delta) \qquad \tau = f''(\delta) \qquad \eta_i = f'''(\delta) \qquad \textbf{(10)}$$

On en déduit une représentation graphique simplifiée des courbes caractéristiques définies au paragraphe 2.1.3 ; en effet, les caractéristiques énergétique, d'ouverture, de puissance interne et de rendement interne de toutes les pompes d'une même famille, quelle que soit leur vitesse de rotation, se ramènent, chacune, à une caractéristique unique dite *caractéristique réduite*, définie par l'une des relations (10). On trouvera un exemple de cette représentation à la figure **3**.

On remarquera, pour conclure, que la connaissance de deux caractéristiques réduites, par exemple $\mu = f(\delta)$ et $\eta_i = f'''(\delta)$, permet de trouver par calcul les autres caractéristiques et, par conséquent, détermine complètement toutes les propriétés de chacune des pompes de la famille considérée, à n'importe quelle vitesse de rotation.

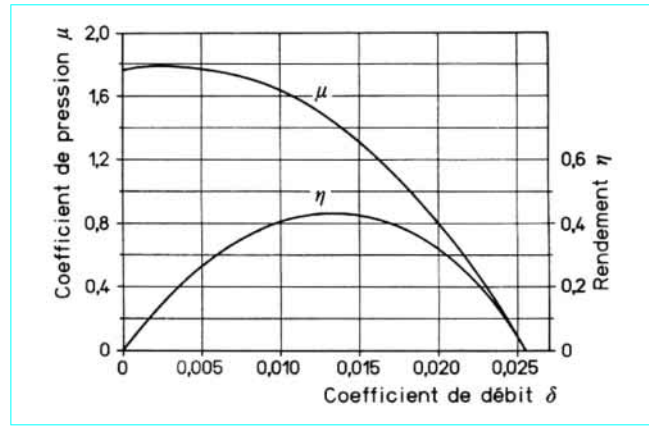

Figure 3 – Caractéristiques réduites d'une famille de pompes centrifuges multicellulaires semblables à celle de la figure 1

6.2 Turbines hydrauliques

Comme nous l'avons indiqué (§ 3.1), la similitude géométrique des turbines hydrauliques, et par conséquent la similitude de fonctionnement de ces machines, postule que les variables de réglages internes x et i aient des valeurs bien déterminées. Lorsqu'il en est ainsi, comme pour les pompes, vu les propriétés de similitude énoncées (§ 4.7), on obtient pour toutes les turbines hydrauliques d'une même famille des relations fonctionnelles caractéristiques ne faisant intervenir qu'une seule variable réduite indépendante, celle-ci étant généralement pour les turbines le coefficient de pression μ.

Si l'on veut néanmoins représenter toutes les propriétés de fonctionnement des turbines d'une même famille, il importe de considérer également la variation des réglages internes, ceux-ci introduisant alors autant de variables indépendantes supplémentaires. Dans le cas le plus général, nous aurons les relations caractéristiques réduites qui suivent :

$$\delta = f(\mu, x, i) \qquad \gamma = f'(\mu, x, i) \qquad \tau = f''(\mu, x, i) \qquad \eta_i = f'''(\mu, x, i) \qquad \textbf{(11)}$$

En pratique, pour les turbines hydrauliques, les coefficients de Rateau ne sont guère utilisés. On définit d'autres variables réduites qui correspondent à un fonctionnement en similitude *sous une hauteur H de 1* m *avec un diamètre de rotor D de 1* m. On distingue ces variables en les affectant d'un double indice 1 pour rappeler leur origine. On définit ainsi *la vitesse angulaire réduite* ω_{11} (ou N_{11}), *le débit réduit* Q_{11} et *la puissance réduite* P_{11}. Chacune de ces variables est dérivée d'un coefficient de Rateau ; on peut les calculer grâce aux propriétés de similitude (§ 4.7). À cet effet, considérons un point de fonctionnement quelconque d'une turbine de diamètre de rotor D, caractérisé par une hauteur $H = E/g$, un débit-volume q_V, une puissance interne P_i et une vitesse angulaire de rotation ω.

■ La **vitesse angulaire réduite** ω_{11} dérive du coefficient de pression μ (6). Compte tenu de la similitude entre le point de fonctionnement quelconque considéré et le point de fonctionnement de référence correspondant à $H = 1$ m et $D = 1$ m, on peut en effet écrire :

$$\mu = E/\omega^2 r_2^2 = 4\,g\,H/\omega^2 D^2 = 4\,g \times 1/\omega_{11}^2 \times 1^2$$

On a donc :

$$\omega_{11} = \omega D/H^{1/2} \qquad \textbf{(12)}$$

On constate que ω_{11} n'est pas une variable adimensionnelle ; sa grandeur dépend donc des unités utilisées. On l'exprime conventionnellement en rad/s de la manière suivante :

$$\omega_{11}\,(\text{rad/s}) = \omega\,(\text{rad/s})\;D(\text{m})/[H(\text{m})]^{1/2} \qquad \textbf{(13)}$$

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

On définit aussi une vitesse angulaire réduite N_{11} exprimée en tr/min et qui vaut :

$$N_{11}\,(\text{tr/min}) = N\,(\text{tr/min})\;D\,(\text{m})/[H\,(\text{m})]^{1/2} \qquad \textbf{(14)}$$

■ Le **débit réduit Q_{11}** et **la puissance réduite P_{11}** s'obtiennent de même, à partir, le premier du coefficient de débit δ (7), la seconde du coefficient de puissance τ (8).

On obtient, en tenant compte de (12) :

$$Q_{11}(\text{L/s}) = q_V\,(\text{L/s})/[D\,(\text{m})]^2\,[H\,(\text{m})]^{1/2} \qquad \textbf{(15)}$$

$$P_{11}(\text{kW}) = P_i\,(\text{kW})/[D\,(\text{m})]^2\,[H\,(\text{m})]^{3/2} \qquad \textbf{(16)}$$

Pour les turbines hydrauliques, on considère aussi le **couple réduit C_{11}**, correspondant du couple interne C_i égal au rapport P_i/ω. On obtient, en divisant (16) par (12) :

$$C_{11}(\text{kJ}) = C_i\,(\text{kJ})/[D\,(\text{m})]^3\,H\,(\text{m}) \qquad \textbf{(17)}$$

Les variables réduites Q_{11}, P_{11} et C_{11} ne sont pas adimensionnelles : en outre, elles ne sont pas dimensionnellement équivalentes à la variable non réduite à laquelle chacune d'elles se rapporte, soit q_V, P_i ou C_i. On les exprime conventionnellement avec les mêmes unités que cette variable non réduite.

■ En fonction de ces variables conventionnelles, on obtient de nouvelles relations caractéristiques, soit :

$$Q_{11} = f(N_{11}, x, i) \qquad C_{11} = f'(N_{11}, x, i)$$
$$P_{11} = f''(N_{11}, x, i) \qquad \eta_i = f'''(N_{11}, x, i) \qquad \textbf{(18)}$$

Lorsque seul le degré d'ouverture x du distributeur est réglable, les propriétés complètes d'une famille de turbines hydrauliques peuvent se représenter en portant deux variables dépendantes, par exemple P_{11} et η_i, en fonction de N_{11} et du degré d'ouverture x. Une représentation très utilisée consiste à tracer :

— P_{11} ou Q_{11} en fonction de N_{11} avec x comme paramètre ;
— les courbes joignant entre eux les points d'égal rendement.

Le résultat, dont un exemple est donné à la figure 4, est analogue à la représentation d'une colline à l'aide de courbes de niveau, le rendement η_i correspondant aux cotes d'altitude. C'est pourquoi ces courbes portent le nom de **courbes en colline** ou **courbes topographiques** de la famille de turbines.

Lorsque le degré d'ouverture x du distributeur et l'angle de calage i des aubages rotoriques sont tous les deux réglables, on trace les courbes en colline définies ci-dessus pour diverses valeurs de i. Ces courbes, dont un exemple est donné à la figure 5, portent le nom de **collines partielles**.

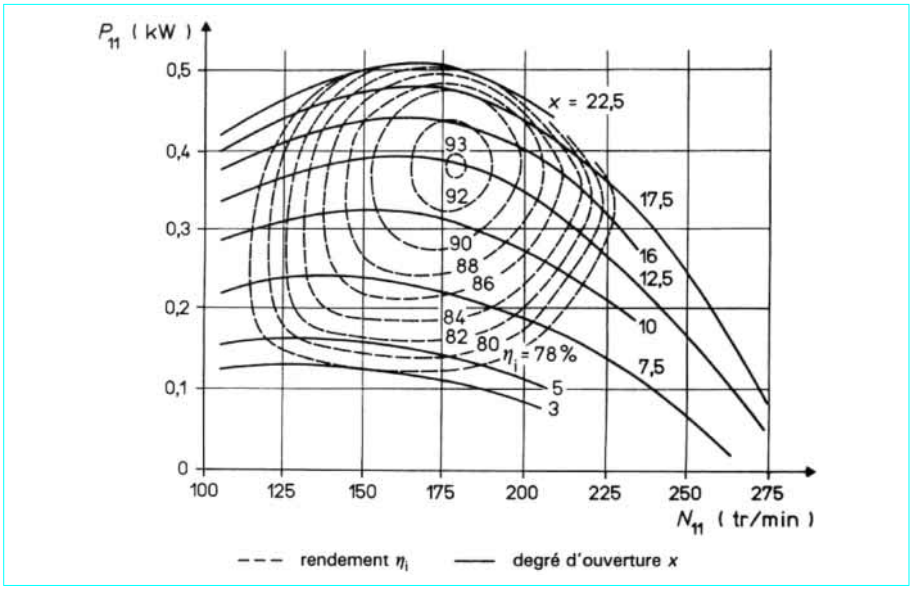

Figure 4 – Courbes en colline d'une turbine Francis

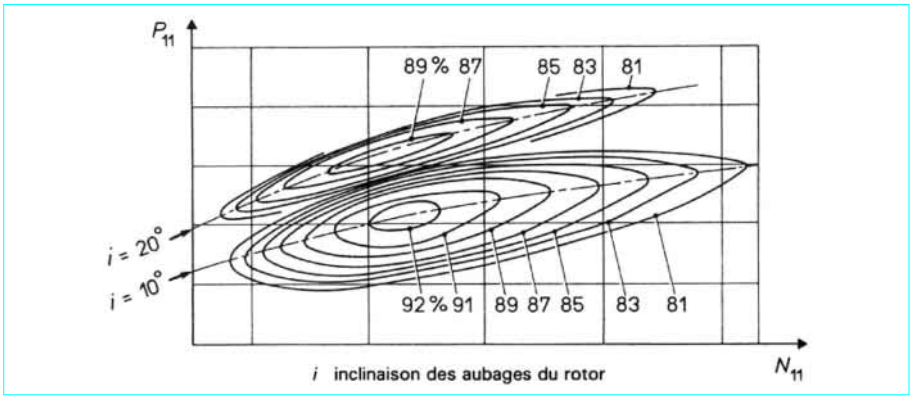

Figure 5 – Courbes en collines partielles d'une turbine Kaplan

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

Remarquons pour conclure que la représentation des caractéristiques des turbines hydrauliques par la méthode des courbes en colline est utilisée également pour illustrer le fonctionnement d'une turbine unique. Dans ce cas, la transposition des variables de fonctionnement à un diamètre D égal à 1 m n'est pas obligatoire ; on l'effectue cependant, car elle offre l'avantage de donner une représentation indépendante des dimensions de la machine étudiée.

7. Limitation des propriétés de similitude

7.1 Variables secondaires

L'établissement des propriétés de similitude (§ 4) fait clairement apparaître une approximation : on a admis que l'influence du nombre de Reynolds Re et de la rugosité relative ε/ℓ pouvait être négligée. En toute généralité, Re et ε/ℓ sont autant de variables réduites indépendantes supplémentaires qu'il aurait fallu considérer. Pour une pompe, par exemple, les relations fonctionnelles caractéristiques (10) devraient s'écrire :

$$\mu,\ \gamma,\ \tau, \text{ et } \eta_i = f(\delta,\ Re,\ \varepsilon/\ell)$$

L'exigence de réaliser l'invariance de variables indépendantes supplémentaires diminuerait cependant fortement l'utilité pratique des propriétés de similitude, d'où l'approximation consentie.

Remarquons d'ailleurs que si l'on reste en écoulement turbulent, ce qui est souvent le cas des turbomachines, l'influence de Re reste faible, sauf pour de très grands écarts ; il en est de même pour ε/ℓ, tout au moins dans le domaine normal de variation de cette grandeur.

En pratique, on négligera donc l'influence des variables secondaires Re et ε/ℓ, mais le domaine d'application des propriétés de similitude, pour tenir compte des limitations signalées ci-dessus, sera strictement défini.

7.2 Effet d'échelle

Lorsque les influences combinées du nombre de Reynolds et de la rugosité ne peuvent plus être négligées, ce qui advient notamment lorsque l'on étudie expérimentalement une turbomachine de grande puissance à l'aide d'un modèle réduit, on fait appel à des formules de correction, dites d'*effet d'échelle*, qui permettent de déduire le rendement interne de la machine réelle de celui mesuré sur sa maquette en état de fonctionnement semblable. Compte tenu de la complexité des phénomènes, cette correction ne vise en pratique que le régime d'adaptation, c'est-à-dire le fonctionnement à rendement maximal.

Le raisonnement suivant justifie la structure de ces formules.

Selon qu'il s'agit d'une pompe ou d'une turbine, son rendement interne a pour expression :

$$\eta_i = \frac{E}{E_i} = \frac{E}{E_a + \dfrac{P_{f,d}}{q_i}} \approx \frac{E_a - \Sigma\Delta f_H - \Sigma\Delta f_{F,i}}{E_a}\left(1 - \frac{P_{f,d}}{E_a\, q_i}\right) \quad \text{(pompe)}$$

$$= 1 - \frac{\Sigma\Delta f_H}{E_a} - \eta_{i,0}\frac{P_{f,d}}{E_a\, q_i} - \frac{\Sigma\Delta f_{F,i}}{E_a}$$

$$\eta_i = \frac{|E_i|}{|E|} = \frac{|E_a| - P_{f,d}/q_i}{|E|} = \frac{|E| - \Sigma\Delta f_H - \Sigma\Delta f_{F,i} - P_{f,d}/q_i}{|E|} \quad \text{(turbine)}$$

$$= 1 - \frac{\Sigma\Delta f_H}{|E|} - \eta_{i,0}\frac{P_{f,d}}{|E_a|\, q_i} - \frac{\Sigma\Delta f_{F,i}}{|E|}$$

avec E_a le travail sur l'arbre (ou énergie massique théorique) qui serait échangé avec la couronne des aubages mobiles si elle était traversée par le débit interne q_i en ne tenant compte que des frottements hydrauliques,

$\Sigma\Delta f_H$ la somme des pertes hydrauliques dans les canaux,

$\Sigma\Delta f_{F,i}$ la somme des pertes par fuites internes,

$\eta_{i,0}$ la valeur que prendrait le rendement interne en l'absence de frottements de disques.

Il reste à examiner comment l'effet d'échelle agit sur chacun des termes constituant la quantité $1 - \eta_i$. Pour cela, on supposera qu'en dehors des pertes elles-mêmes les autres quantités, qui interviennent numériquement en facteur, suivent les lois de la similitude hydraulique simplifiée et ne subissent donc pas l'influence du nombre de Reynolds et de la rugosité. Cette façon de procéder revient à calculer la partie principale de la variation de $1 - \eta_i$.

7.2.1 Variation des pertes hydrauliques dans les canaux

Conformément à la description qui en est faite dans l'article *Théorie générale des turbomachines* [B 4 400], les pertes hydrauliques dans les canaux d'une turbomachine qui véhicule, comme c'est ici le cas, un fluide incompressible homogène, sont uniquement constituées de pertes par frottement sur les parois des canaux et des pertes par décollements. Elles s'expriment, pour chaque canal, sous la forme d'une fraction ζ de l'énergie cinétique associée à une vitesse de référence choisie en un point du canal :

$$\Delta f = \zeta_f \frac{v^2}{2} \text{ (canal fixe)} \qquad \Delta f_r = \zeta_r \frac{w^2}{2} \text{ (canal mobile)}$$

Le coefficient ζ est alors fonction, d'une part, du nombre de Reynolds $\rho v\ell/\mu$ ou $\rho w\ell/\mu$, où ℓ désigne une dimension caractéristique du canal et, d'autre part, de la rugosité relative des parois ε/ℓ.

Nota : il paraît exclu que le lecteur puisse confondre μ, viscosité du fluide entrant dans le nombre de Reynolds, avec le coefficient de pression traditionnellement représenté par le même symbole.

Lorsque l'on additionne les pertes des différents canaux, on peut utiliser le fait qu'en similitude de fonctionnement toute vitesse d'écoulement en des points homologues est proportionnelle à u_2 et que chacune des dimensions caractéristiques ℓ est aussi dans un rapport donné avec le diamètre D du rotor, pour substituer à l'ensemble des nombres de Reynolds et des rugosités relatives associés à tous les canaux un nombre de Reynolds unique $\rho u_2 D/\mu$ et une seule rugosité relative ε/D, qui l'un comme l'autre sont représentatifs de la machine considérée globalement.

Ainsi les pertes hydrauliques se mettent sous la forme :

$$\Sigma\Delta f_H = \left[f_1\left(Re = \frac{\rho\, u_2\, D}{\mu},\ \frac{\varepsilon}{D}\right) + k_1\right]\frac{u_2^2}{2}$$

où la fonction f_1 rend compte des pertes par frottement et la constante k_1 des pertes par décollements, insensibles par nature au nombre de Reynolds et à la rugosité.

Puisqu'en similitude simplifiée $E_a = \Delta_1^2(\vec{u} \times \vec{v})$ et $E = \mu \cdot u_2^2$ varient chacun comme u_2^2, on aboutit à :

$$\underset{\text{(pompe)}}{\frac{\Sigma\Delta f_H}{E_a}} \text{ ou } \underset{\text{(turbine)}}{\frac{\Sigma\Delta f_H}{E}} = F_1\left(Re = \frac{\rho\, u_2\, D}{\mu},\ \frac{\varepsilon}{D}\right) + C_1$$

où C_1 est une constante issue de k_1.

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

7.2.2 Variation des pertes par frottement de disques

Comme il a déjà été établi (§ 4.4) que :

$$\frac{P_{f,d}}{E_a\, q_i} = k_{f,d} \cdot \frac{u_2^2}{\Delta_1^2 (\vec{u} \times \vec{v})}$$

on constate que :

$$\eta_{i,0} \frac{P_{f,d}}{E_a\, q_i} = F_2 \left(Re = \frac{\rho\, u_2\, D}{\mu},\ \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

puisque $\eta_{i,0}$ se conserve en similitude simplifiée et que $k_{f,d}$ dépend des deux variables qui gouvernent l'effet d'échelle.

7.2.3 Variation des pertes par fuites internes

Si l'on se réfère à l'analyse des fuites internes effectuée dans l'article *Théorie générale des turbomachines* [B 4 400], de telles pertes s'expriment pour une machine monocellulaire sous la forme :

$$\Sigma \Delta f_{F,i} = \Sigma \Delta f_{f,i} + \Delta f_j$$

où le premier terme rend compte des fuites circulant à travers les garnitures d'étanchéité, tandis que le second n'existe que si les aubages mobiles possèdent des extrémités libres, éloignées du stator par un jeu j.

En reprenant les expressions (81) et (84) de l'article *Théorie générale des turbomachines* [B 4 400] et en assimilant E_i à E_a, ce qui est légitime à l'intérieur d'un terme de perte, on trouve que :

$$\underset{\text{(pompe)}}{\frac{\Sigma \Delta f_{F,i}}{E_a}} \text{ ou } \underset{\text{(turbine)}}{\frac{\Sigma \Delta f_{F,i}}{|E|}} = \eta_h \left(\Sigma\, k_{f,i} \frac{q_{f,i}}{q_i} + k_j \frac{j}{h} \right)$$

avec η_h rendement hydraulique, qui, tout comme $q_{f,i}/q_i$, reste invariant en similitude simplifiée,
h hauteur des aubes mobiles.

Lorsqu'il existe, le coefficient k_j n'est que très peu affecté par le nombre de Reynolds, alors que les $k_{f,i}$ sont, dans une mesure moins restreinte, susceptibles d'en ressentir les effets, puisqu'ils contiennent l'influence que les fuites internes exercent sur les pertes hydrauliques de l'écoulement principal.

En définitive, on discerne là encore une partie soumise à l'effet d'échelle et une autre, ici prépondérante, qui se maintient constante :

$$\underset{\text{(pompe)}}{\frac{\Sigma \Delta f_{F,i}}{E_a}} \text{ ou } \underset{\text{(turbine)}}{\frac{\Sigma \Delta f_{F,i}}{E}} = F_3 \left(Re,\ \frac{\varepsilon}{D} \right) + C_3$$

7.2.4 Formule de correction

En cumulant les pertes internes de diverses origines, l'on aboutit à une relation générale de la forme :

$$1 - \eta_i = F\left(Re = \frac{\rho\, u_2\, D}{\mu},\ \frac{\varepsilon}{D} \right) + C$$

Si l'on part d'une première machine qui sera le plus souvent la maquette d'une grande unité, on peut isoler la part invariable C en l'exprimant comme une fraction K de ses pertes totales :

$$C = (1 - \eta_{i,1})\, K$$

de sorte que la part complémentaire des pertes internes, qui pour la maquette est égale à $(1 - \eta_{i,1})(1 - K) = F_1$, devient pour la seconde machine :

$$F_2 = \frac{F_2}{F_1} \cdot F_1 = \frac{F_2}{F_1} (1 - \eta_{i,1})(1 - K)$$

Ainsi le rendement interne $\eta_{i,2}$ de la machine *grandeur* sera tel que :

$$1 - \eta_{i,2} = F_2 + C = \frac{F_2}{F_1} (1 - \eta_{i,1})(1 - K) + (1 - \eta_{i,1})\, K$$
$$= (1 - \eta_{i,1}) \left[K + (1 - K) \frac{F_2}{F_1} \right]$$

d'où la formule de correction de l'effet d'échelle :

$$\frac{1 - \eta_{i,2}}{1 - \eta_{i,1}} = K + (1 - K) \frac{F_2(Re_2,\ \varepsilon_2/D_2)}{F_1(Re_1,\ \varepsilon_1/D_1)} \qquad \textbf{(19)}$$

Il est normal que le terme K, qui représente la fraction des pertes internes insensibles à l'effet d'échelle et qui recouvre à ce titre la plus grande part des pertes par fuites internes ainsi que les pertes hydrauliques par décollement, varie notablement avec le type d'appareil considéré. À titre d'exemples, K sera d'autant plus petit que le débit nominal de la machine, ou plus exactement son δ, sera plus grand, car les fuites diminuent alors en importance relative ; il décroît également si le constructeur met un soin particulier à atténuer les décollements en raccordant de façon bien continue les canaux fixes et mobiles.

Pour comprendre les variations de la fonction F qui, dans sa presque totalité, représente en valeur relative les pertes hydrauliques dues au frottement sur les parois des canaux, il faut se rapporter aux lois qui gouvernent le coefficient ζ de chaque canal.

Celles-ci ont été étudiées dans l'article *Théorie générale des turbomachines* [B 4 400] et sont représentées graphiquement sur la figure 6, en retenant, pour fixer les idées, le cas des canaux mobiles.

Lorsque l'on passe de la maquette à la machine *grandeur*, le point représentatif des conditions propres à chaque canal occupe successivement des positions repérées M et G, de sorte que le rapport F_2/F_1 se trouve physiquement bien déterminé, mais sans qu'aucune expression simple ne puisse lui être attribuée dans le cas général.

Toutefois, lorsque les machines étudiées fonctionnent en régime turbulent, ce qui se rencontre très fréquemment en pratique, il existe deux situations particulières où F_2/F_1 prend une forme simple.

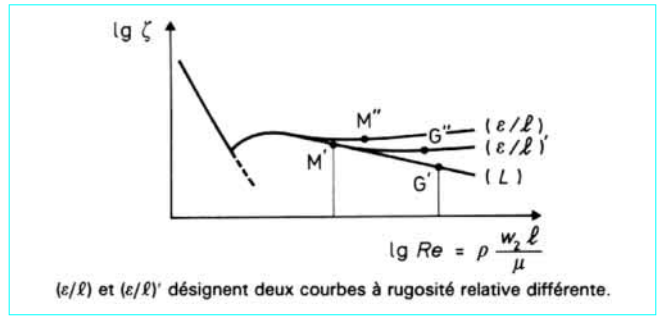

Figure 6 – Coefficient ζ d'une couronne d'aubages mobiles

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

1er cas

Les surfaces de la maquette ont été polies et les dimensions de la machine réelle sont suffisamment grandes pour que sa rugosité relative soit négligeable.

Pour chaque canal, les points M et G se placent alors en M′ et G′ sur la courbe (L) des régimes turbulents lisses où ζ varie sensiblement comme Re^{-m}, m étant de l'ordre de 0,20 à 0,25. Puisque toutes les pertes qui constituent F suivent cette même loi, F en fait de même et :

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{u_{2,1}}{u_{2,2}} \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^m$$

2e cas

Les deux appareils sont réalisés avec les mêmes moyens de fabrication, créant la même rugosité ε, et leurs conditions de fonctionnement les situent dans le domaine turbulent complètement rugueux, où les ζ deviennent indépendants du nombre de Reynolds.

Sur la figure 6, les points représentatifs se placent en M″ et G″ et, en raisonnant par analogie avec l'écoulement sur une plaque plane, ζ varie comme $(\varepsilon/\ell)^{-n}$ avec n de l'ordre de 0,20 dans la plage des rugosités relatives obtenues industriellement. Il en découle que :

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^n$$

Les résultats publiés par les différents expérimentateurs, et qui, pour les plus typiques d'entre eux, ont été rassemblés dans le tableau 1, reflètent par leur diversité la complexité des phénomènes, mais leur contenu s'éclaire à la lumière des précédentes analyses. Ainsi les formules d'Ackeret, de Canaan et de Hutton, qui empruntent la même forme :

$$\frac{1-\eta_{i,2}}{1-\eta_{i,1}} = K + (1-K)\left(\frac{Re_1}{Re_2}\right)^m$$

avec $K = 0{,}5$ ou 0,3 et $m = 0{,}20$ ou 0,25, visent des machines en écoulement turbulent lisse. Par contre, la formule de Moody, où $K = 0$, s'applique à des turbines en écoulement turbulent complètement rugueux. Seule la formule de Pfleiderer présente une structure totalement empirique qui échappe au raisonnement.

Tableau 1 – Formules de correction d'effet d'échelle

Auteur	$(1-\eta_{i,2})/(1-\eta_{i,1})$	Application
Ackeret (1930)	$0{,}5 + 0{,}5\,(Re_1/Re_2)^{0,2}$	turbines
Moody (1939)	$(D_1/D_2)^{0,20}$	turbines
Canaan (1945)	$0{,}5 + 0{,}5\,(Re_1/Re_2)^{0,25}$	pompes et turbines
Pfleiderer (1947)	$(Re_1/Re_2)^{0,1} \times (D_1/D_2)^{0,05}$	pompes et turbines
Hutton (1954)	$0{,}3 + 0{,}7\,(Re_1/Re_2)^{0,2}$	turbines axiales

7.3 Cavitation

Les raisonnements conduisant aux propriétés de similitude supposent implicitement l'homogénéité de l'écoulement liquide. Lorsqu'il y a *cavitation*, c'est-à-dire existence de poches locales de vapeur dans l'écoulement, les propriétés de similitude qui viennent d'être énoncées ne sont plus valables.

Seul le seuil d'apparition de ce phénomène est régi par des lois de similitude particulières, qui sont établies séparément dans les articles consacrés aux pompes et aux turbines, car elles ont une répercussion fondamentale sur le choix de l'appareil le mieux adapté à chaque besoin.

8. Vitesse spécifique

8.1 Introduction

La vitesse spécifique est un concept basé sur les propriétés de similitude, qui permet de résoudre logiquement le problème du choix d'une turbomachine hydraulique répondant à une application donnée. Cette notion constitue, en effet, une base normale pour le classement des turbomachines selon leur type.

L'usage a consacré plusieurs définitions de la vitesse spécifique. Ainsi, les praticiens utilisent le *nombre de tours spécifique* (§ 8.3), ce que nous considérons comme une tradition regrettable ; en effet, cette notion est non seulement définie différemment pour les pompes et les turbines hydrauliques, mais encore est en fait une survivance du système d'unités industriel. Nous l'utiliserons uniquement parce qu'elle permet de retrouver les valeurs numériques habituelles.

À l'encontre de cette pratique courante, nous donnons la préférence au *coefficient de vitesse spécifique*, ou à ses dérivés, que nous établirons d'ailleurs en premier lieu (§ 8.2). Nous estimons, en effet, que l'usage du coefficient de vitesse spécifique devrait s'imposer, non seulement du fait de l'unicité de définition pour toutes les turbomachines hydrauliques, mais aussi parce qu'à l'encontre des définitions usuelles, ce coefficient est sans dimension.

8.2 Coefficient de vitesse spécifique

8.2.1 Définition

Considérons le fonctionnement d'une turbomachine quelconque sur un circuit donné ; il y correspond des valeurs bien déterminées du débit-volume q_V, de l'énergie massique utile ou disponible E, de la vitesse de rotation ω, et par conséquent aussi des coefficients de Rateau de pression μ (6) et de débit δ (7).

Ce fonctionnement implique une relation obligatoire entre ces diverses grandeurs ; on obtient, en effet, en éliminant le rayon r_2 du rotor de la machine considérée entre les relations (6) et (7) :

$$\delta^{1/2}/\mu^{3/4} = \omega q_V{}^{1/2}/E^{3/4}$$

Par définition, *le coefficient de vitesse spécifique d'une turbomachine en un point de fonctionnement est la vitesse de rotation d'une machine de même type fonctionnant en similitude avec le débit unitaire de 1* m³/s *sous une énergie massique utile ou disponible de 1* J/kg.

Si Ω_s désigne le coefficient de vitesse spécifique, on a, d'après la relation précédente, puisque μ et δ sont constants en similitude :

$$\delta^{1/2}/\mu^{3/4} = \Omega_s 1^{1/2}/1^{3/4}$$

Il en résulte que pour le point de fonctionnement (ω, q_V, E) considéré, le coefficient de vitesse spécifique vaut :

$$\Omega_s = \delta^{1/2}/\mu^{3/4} = \omega(\text{rad/s})\,[q_V(\text{m}^3/\text{s})]^{1/2}/[E\,(\text{J/kg})]^{3/4} \qquad \textbf{(20)}$$

On peut donc constater que, comme indiqué au paragraphe 8.1, Ω_s est un nombre sans dimension, d'où la dénomination choisie de *coefficient* de vitesse spécifique.

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

8.2.2 Définitions équivalentes

Au lieu du coefficient de vitesse spécifique Ω_s, on a proposé l'emploi de coefficients équivalents qui sont les suivants :

— le *coefficient de type R*, proposé par Hannocq, qui vaut :

$$R = \omega^2 q_V/(2E)^{3/2} = 0{,}354\ \Omega_s^2 \qquad (21)$$

— le *chiffre de vitesse spécifique* n_0, préconisé par les constructeurs suisses de turbines hydrauliques, égal à :

$$n_0 = \omega (q_V/\pi)^{1/2}/(2E)^{3/4} = 0{,}335\ \Omega_s \qquad (22)$$

— recommandée par l'AFNOR, la racine carrée du coefficient de type, soit :

$$\sqrt{R} = 0{,}595\ \Omega_s \qquad (23)$$

8.2.3 Vitesse spécifique, base de classement

En toute généralité, le coefficient de vitesse spécifique Ω_s (§ 8.2.1) est fonction du coefficient de débit δ ou encore du point de fonctionnement considéré (9). En pratique cependant, lorsque l'on parle de la vitesse spécifique d'une turbomachine sans autre indication, il s'agit de la vitesse spécifique au point de rendement maximal ou *point d'adaptation* (figure **1**).

C'est en ce sens que la vitesse spécifique ou ses dérivés constituent une base de classement des turbomachines selon leur type. On peut, en effet, montrer que, lorsque la vitesse spécifique augmente, il est nécessaire de faire évoluer la forme des rotors et de passer progressivement de la forme radiale à la forme axiale. Cette propriété ne sera néanmoins pas établie ici.

8.2.4 Diamètre spécifique réduit

Reprenons la turbomachine considérée au paragraphe 8.2.1. On peur remarquer qu'il existe dans la famille de cette machine une machine particulière qui, tournant à la vitesse angulaire Ω_s, fournit en similitude avec le fonctionnement (ω, q_V, E) le débit unitaire sous une énergie massique unitaire ; par définition, le diamètre du rotor de cette machine est le *diamètre spécifique réduit* que nous désignons par Δ. La valeur de Δ est obtenue en éliminant la vitesse angulaire entre les relations (6) et (7) définissant μ et δ et en procédant ensuite comme pour Ω_s (§ 8.2.1). Si D désigne le diamètre du rotor de la turbomachine dont le fonctionnement est caractérisé par (ω, q_V, E), on obtient ainsi :

$$\Delta = 2\mu^{1/4}/\delta^{1/2} = D(\mathrm{m})\,[E(\mathrm{J/kg})]^{1/4}/[q_V(\mathrm{m^3/s})]^{1/2} \qquad (24)$$

Comme Ω_s, le diamètre spécifique réduit Δ est un nombre sans dimension. Pour autant qu'il soit calculé au point de rendement maximal, Δ constitue également une caractéristique propre à chaque type de turbomachine.

8.3 Nombre de tours spécifique

8.3.1 Pompes

Par définition, le nombre de tours spécifique d'une pompe en un point de fonctionnement est égal à *la vitesse de rotation exprimée en tr/min d'une machine de la même famille fonctionnant en similitude avec un débit unitaire de 1* m³/s *sous une hauteur de 1* m.

Nous désignons le nombre de tours spécifique d'une pompe par N_s. En procédant comme pour Ω_s (§ 8.2.1), on trouve pour un point de fonctionnement caractérisé par un débit-volume q_V, une hauteur $H = E/g$ et une vitesse de rotation $N = 60\ \omega/2\pi$:

$$N_s = N(\mathrm{tr/min})\,[q_V(\mathrm{m^3/s})]^{1/2}/[H(\mathrm{m})]^{3/4} \qquad (25)$$

En comparant (20) et (25), on trouve encore :

$$N_s = 60\ g^{3/4}\,\Omega_s/2\pi = 52{,}9\ \Omega_s \qquad (26)$$

On remarquera qu'à l'encontre de Ω_s, le nombre de tours spécifique N_s n'est pas adimensionnel ; en outre, ses dimensions ne sont pas celles d'une vitesse de rotation.

8.3.2 Turbines hydrauliques

Par définition, le nombre de tours spécifique d'une turbine en un point de fonctionnement est égal à *la vitesse de rotation exprimée en tr/min d'une turbine de même type fonctionnant en similitude sous une hauteur de 1* m *avec de l'eau de masse volumique égale à 1 000* kg/m³ *en fournissant une puissance à l'arbre de 1* ch.

Cette définition, différente de celle relative aux pompes, est due à des circonstances historiques. En effet, les turbines hydrauliques se sont développées comme moteurs dès le milieu du 19e siècle, avant l'électricité. Les variables caractérisant le fonctionnement d'une turbine étaient essentiellement la hauteur de chute H, la puissance à l'arbre P_i, que l'on exprimait en chevaux-vapeur, et la vitesse de rotation N. D'où la définition adoptée ci-dessus.

Pour éviter toute confusion, nous désignons le nombre de tours spécifique d'une turbine hydraulique par N'_s. La valeur de N'_s correspondant à un fonctionnement quelconque (H, P_i, N) peut être calculée en éliminant le rayon r_2 du rotor entre les relations (6) et (8) définissant respectivement les coefficients de Rateau de pression μ et de puissance τ. On obtient ainsi :

$$\tau^{1/2}/\mu^{5/4} = \omega (P_i)^{1/2}/(gH)^{5/4}\rho^{1/2} \qquad (27)$$

D'où, en appliquant la définition de N'_s, puisque τ et μ restent constants en similitude :

$$N'_s = N(\mathrm{tr/min})[P_i(\mathrm{ch})]^{1/2}/[H(\mathrm{m})]^{5/4} \qquad (28)$$

On peut lier N'_s au coefficient de vitesse spécifique Ω_s. À cet effet, comparons les relations (27) et (28) en tenant compte des valeurs numériques de g (= 9,81 m/s²), de ρ (= 1 000 kg/m³) et de l'unité de puissance utilisée soit 1 ch (= 736 W). On obtient :

$$N'_s = 60\ g^{5/4}\ \rho^{1/2}\ \tau^{1/2}/2\pi\,(736)^{1/2}\ \mu^{5/4} = 193{,}2\ \tau^{1/2}/\mu^{5/4}$$

Introduisons dans cette expression la valeur du rendement interne η_i en fonction des coefficients de Rateau, soit (§ 4.6) $\eta_i = \tau/\delta\mu$, et tenons encore compte de (20) :

$$N'_s = 193{,}2\ \eta_i^{1/2}\ \delta^{1/2}/\mu^{3/4} = 193{,}2\ \eta_i^{1/2}\ \Omega_s$$

À l'encontre du résultat obtenu pour les pompes (26), on constate que pour calculer le nombre de tours spécifique N'_s d'une turbine hydraulique, il faut faire une hypothèse sur la valeur du rendement interne η_i. On choisit généralement $\eta_i = 0{,}9$; dans ces conditions, on obtient finalement :

$$N'_s = 183{,}3\ \Omega_s \qquad (29)$$

Pas plus que N_s, le nombre de tours spécifique N'_s n'est adimensionnel, ni n'a les dimensions d'une vitesse de rotation.

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

8.3.3 Diamètre spécifique

Comme nous l'avons fait pour Ω_s (§ 8.2.4), on peut associer au nombre de tours spécifique N_s ou N'_s un diamètre spécifique.

Pour une pompe de diamètre D dont le fonctionnement est défini par (q_V, H, N), le diamètre spécifique est le diamètre de la machine du même type qui, tournant à la vitesse N_s, fournit en similitude un débit unitaire de 1 m^3/s sous une hauteur unitaire de 1 m. En désignant par d_s le diamètre spécifique d'une pompe, on obtient :

$$d_s = D(\text{m})\,[H(\text{m})]^{1/4}/[q_V(\text{m}^3/\text{s})]^{1/2} \qquad \textbf{(30)}$$

De même, pour une turbine hydraulique de diamètre D dont le fonctionnement est défini par (H, P_i, N), le diamètre spécifique est le diamètre de la machine du même type qui, tournant à la vitesse N'_s, fournit en similitude une puissance unitaire de 1 ch sous une hauteur unitaire de 1 m. En désignant par d'_s le diamètre spécifique d'une turbine hydraulique, on obtient :

$$d'_s = D(\text{m})[H(\text{m})]^{3/4}/[P_i(\text{ch})]^{1/2} \qquad \textbf{(31)}$$

On remarquera que les diamètres spécifiques d_s et d'_s ne sont pas dimensionnellement équivalents à une longueur. Ils sont liés numériquement au diamètre spécifique réduit Δ défini au paragraphe 8.2.4 par les relations suivantes obtenues, la première en comparant (24) et (30), la seconde en comparant (24) et (31) et en admettant un rendement interne η_i de 0,90 :

$$d_s = 0{,}565\,\Delta \quad \text{et} \quad d'_s = 0{,}163\,\Delta$$

La notion de diamètre spécifique est principalement utilisée pour les turbines hydrauliques.

8.4 Facteurs de conversion

Nous rappelons en conclusion dans le tableau **2** les facteurs de conversion entre les diverses définitions que nous avons données de la vitesse spécifique d'une turbomachine hydraulique.

Tableau 2 – Vitesses spécifiques. Facteurs de conversion

Dénomination	Ω_s	n_0	$\sqrt{R}$	N_s	N'_s
Coefficient de vitesse spécifique..... Ω_s	1	0,335	0,595	52,9	183,3
Chiffre de vitesse spécifique ..... n_0	2,99	1	1,78	158,2	548,1
Coefficient AFNOR ..... $\sqrt{R}$	1,68	0,562	1	88,9	308,1
Nombre de tours spécifique ..... N_s	0,018 9	0,006 33	0,011 2	1	3,47
Nombre de tours spécifique ..... N'_s	0,005 46	0,001 83	0,003 25	0,289	1

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite.
© Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique

Caractéristiques et similitude des turbomachines hydrauliques

par **André L. JAUMOTTE**
Ingénieur civil
Professeur à l'Université libre de Bruxelles

Pierre DECOCK
Ingénieur civil
Chef de travaux à l'Université libre de Bruxelles

et **Gilbert RIOLLET**
Professeur honoraire à l'École Centrale des Arts et Manufactures
Ancien Directeur Technique des turbines à vapeur Alsthom

Bibliographie

COMOLET (R.). – *L'effet d'échelle dans les turbomachines*. Pumps, Pompes, Pumpen n° 4, p. 246-51 (1965).

SEDILLE (M.). – *Turbomachines hydrauliques et thermiques*. Tome II : *Pompes centrifuges et axiales*. *Turbines hydrauliques*. 572 p., 475 fig., Masson (1967).

JAUMOTTE (A.). – *Turbomachines*. 1re partie : *Théorie générale*. 4e édition, Presses Universitaires de Bruxelles (1972).

WISLICENUS (G.F.). – *Fluid mechanics of turbomachinery*. 2 vol., Dover Publications Inc. (1964).

Toute reproduction sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie est strictement interdite. – © Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique